PART2　円の接線，2 円の交点を通る図形

2 ［1］ 点 $(1,\ 3)$ を通り，円 $x^2+y^2=1$ に接する直線の方程式を求めよ。

［2］ 円 $(x-1)^2+y^2=5$ と，中心 $(a,\ b)$，半径 1 の円の 2 つの共有点を通る直線の方程式が $x-y+2=0$ である。このとき，$(a,\ b)$ を求めよ。

Point Pickup

［1］ 円外の点から引いた接線の方程式は

① 円の中心と接線の距離が半径と等しいことを利用する

② 接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とおき，接線の公式を利用する

のいずれかの方法を用いて求めるとよい。

［2］ x，y を含む 2 つの曲線 $f(x,\ y)=0$，$g(x,\ y)=0$ の交点を通る曲線は

$$f(x,\ y)+kg(x,\ y)=0 \quad (k \text{ は実数})$$

第 5 講　PART2　確認問題

1 点 $(-1,\ 2)$ を通り，円 $x^2+y^2=1$ に接する直線の方程式を求めよ。

$x=$ [アイ], [ウ] $x+$ [エ] $y-$ [オ] $=0$

2 円 $x^2+(y-2)^2=4$ と，点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 3 の円がある。これらの円の 2 つの共有点を通る直線の方程式が $6x+2y+1=0$ であるとき，$(a,\ b)$ を求めよ。

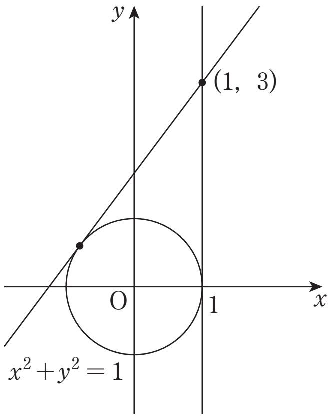
$(a,\ b)=($ [カキ], [ク] $)$, $\left(\dfrac{[ケ]}{[コ]},\ \dfrac{[サ]}{[シ]}\right)$

PART2　円の接線，2 円の交点を通る図形

2　[1]　点 (1, 3) を通り，円 $x^2+y^2=1$ に接する直線の方程式を求めよ。

[2]　円 $(x-1)^2+y^2=5$ と，中心 $(a,\ b)$，半径 1 の円の 2 つの共有点を通る直線の方程式が $x-y+2=0$ である。このとき，$(a,\ b)$ を求めよ。

[1]　図より，求める接線の 1 つは直線 $x=1$ である。



x 軸に垂直でないもう 1 本の接線の方程式を

$$y=m(x-1)+3$$

すなわち $mx-y-m+3=0$ …… ①とおくと，

円の中心 (0, 0) と直線①の距離が円の半径 1 と等しい。したがって

$$\frac{|-m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$$

$$(m-3)^2=m^2+1 \qquad m=\frac{4}{3}$$

これを①に代入して整理すると　$4x-3y+5=0$

よって，求める接線の方程式は　$x=1,\ 4x-3y+5=0$

(別解)

求める接線と円の接点を $P(x_1,\ y_1)$ とすると，点 P における接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=1 \text{ …… ①}$$

これが点 (1, 3) を通るので　$x_1+3y_1=1$　すなわち　$x_1=1-3y_1$ …… ②

また，点 P は円上の点であるから　${x_1}^2+{y_1}^2=1$ …… ③

②を③に代入して整理すると

$$5{y_1}^2-3y_1=0 \qquad y_1(5y_1-3)=0 \qquad y_1=0,\ \frac{3}{5}$$

②より　$y_1=0$　のとき　$x_1=1$　　$y_1=\frac{3}{5}$　のとき　$x_1=-\frac{4}{5}$

したがって①から，求める接線の方程式は

$$x=1,\ -\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y=1 \quad \text{すなわち} \quad x=1,\ 4x-3y+5=0$$

［2］　題意より，円 $(x-1)^2+y^2=5$ …… ① と直線 $x-y+2=0$ …… ② の 2 つの共有点を中心 $(a,\ b)$，半径 1 の円が通る。

①，②の共有点を通る図形の方程式は

$$(x-1)^2+y^2-5+k(x-y+2)=0 \quad (k \text{ は定数})$$

$$x^2+(k-2)x+y^2-ky+2k-4=0$$

$$\left(x+\frac{k-2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{k}{2}\right)^2=\frac{1}{2}k^2-3k+5 \quad \cdots\cdots ③$$

と表される。③が半径 1 の円を表すのは $\dfrac{1}{2}k^2-3k+5=1^2$ のときであり

$$k^2-6k+8=0 \qquad (k-2)(k-4)=0$$

よって　$k=2,\ 4$ のときである。

このとき，円③の中心の座標は　$\left(-\dfrac{k-2}{2},\ \dfrac{k}{2}\right)$

$k=2$ のとき　円の中心は　$(0,\ 1)$

$k=4$ のとき　円の中心は　$(-1,\ 2)$

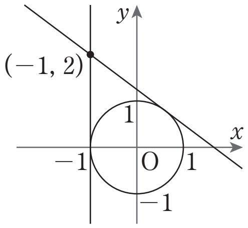
したがって　$(a,\ b)=(0,\ 1),\ (-1,\ 2)$

第５講　PART2　確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：-1，ウ：3，エ：4，オ：5

[解説]

図より，求める接線の１つは，直線 $x=-1$ である。



x 軸に垂直でないもう１本の接線の方程式を

$$y=m(x+1)+2$$

すなわち

$$mx-y+m+2=0 \quad \cdots\cdots①$$

とおく。直線①が円に接する条件は，円の中心 $(0,\ 0)$ と直線①の距離が円の半径１に等しいことである。

よって

$$\frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1 \quad \text{[A]}$$

$$|m+2|=\sqrt{m^2+1}$$

$$(m+2)^2=m^2+1$$

$$4m=-3$$

ゆえに　$m=-\dfrac{3}{4}$

これを①に代入して整理すると

$$3x+4y-5=0$$

よって，求める接線の方程式は

$$\boldsymbol{x=-1,\ 3x+4y-5=0}$$

（別解）

求める接線と円の接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とすると，点Pにおける接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=1 \cdots\cdots ① \quad \text{[B]}$$

> [A]　点と直線の距離
> 点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は
> $$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

> [B]　円の接線の方程式
> 円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は
> $$x_1x+y_1y=r^2$$

これが点 $(-1,\ 2)$ を通るから

$$-x_1+2y_1=1$$

すなわち　$x_1=2y_1-1$　……②

また，点 P は円上の点であるから

$$x_1{}^2+y_1{}^2=1 \quad \cdots\cdots③$$

②を③に代入すると

$$(2y_1-1)^2+y_1{}^2=1$$

$$5y_1{}^2-4y_1=0$$

$$y_1(5y_1-4)=0$$

ゆえに　$y_1=0,\ \dfrac{4}{5}$

②より，$y_1=0$ のとき　$x_1=-1$

$y_1=\dfrac{4}{5}$ のとき　$x_1=\dfrac{3}{5}$

よって，①から，求める接線の方程式は

$$-x+0=1,\ \frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=1$$

すなわち

$$\boldsymbol{x=-1,\ 3x+4y-5=0}$$

2 **[正解]** カキ：-3，ク：1，ケ：3，コ：2，サ：5，
シ：2

[解説]

$$x^2+(y-2)^2=4 \cdots\cdots ①$$

$$6x+2y+1=0 \cdots\cdots ②$$

とする。
題意より，円①と直線②の 2 つの共有点を，点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 3 の円が通る。
①，②の共有点を通る図形の方程式は，実数 k を用いて

$$x^2+(y-2)^2-4+k(6x+2y+1)=0$$ [C]

と表され，変形すると

$$x^2+6kx+y^2+(2k-4)y+k=0$$

$$(x+3k)^2+\{y+(k-2)\}^2=10k^2-5k+4 \cdots\cdots ③$$

③ が半径 3 の円を表すのは

$$10k^2-5k+4=9$$

のときであるから

$$10k^2-5k-5=0$$

$$2k^2-k-1=0$$

$$(k-1)(2k+1)=0$$

よって　$k=1,\ -\dfrac{1}{2}$

円 ③ の中心の座標は　$(-3k,\ -k+2)$
ゆえに，円 ③ の中心は

$k=1$ のとき　$(-3,\ 1)$

$k=-\dfrac{1}{2}$ のとき　$\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$

よって　$(a,\ b)=$ **$(-3,\ 1),\ \left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$**

[C]　$f(x,\ y)$，$g(x,\ y)$ を x，y を含む式とすると，2 つの曲線 $f(x,\ y)=0$，$g(x,\ y)=0$ の交点を通る図形の方程式は

$$f(x,\ y)+kg(x,\ y)=0$$

（k は定数）